به نام خداوند بخشنده مهربان

جبر خطی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی
پاییز ۱۴۰۲

رنک، وارون و دترمینان | **تمرین سوم** | تاریخ انتشار: ۲۷ آبان ۱۴۰۲

---

۱. پرسش‌های خود درمورد این تمرین را در سامانه کوئرا مطرح کنید.

۲. **سیاست ارسال با تاخیر:** شما در مجموع در طول نیم‌سال می‌توانید از ۱۶ روز تاخیر استفاده کنید. **همچنین هر تمرین تئوری و عملی را می‌توانید تا حداکثر ۳ روز با تاخیر تحویل دهید.** این مقدار برای تمارین تئوری و عملی به‌صورت جداگانه حساب می‌شود. تاخیرها با مقیاس ساعت محاسبه شده و به بالا گرد می‌شوند.

۳. **سیاست مشارکت دانشجویان در حل کردن تمارین:** دانشجویان می‌توانند در حل تمارین برای رفع ابهام و یا به‌دست آوردن ایده‌ی کلی با یک‌دیگر مشورت و همفکری کنند. این کار مورد تایید و تشویق تیم ارائه‌ی درس می‌باشد؛ چرا که هم‌فکری و کار گروهی می‌تواند موجب تقویت یادگیری شود. اما به‌دست آوردن جزئیات راه‌حل و نگارش پاسخ باید تماما توسط خود دانشجو انجام شود. **حتما در انتهای پاسخ‌های ارسالی خود نام افرادی که با آن‌ها همفکری کردید را ذکر کنید.**

سوالات تئوری (۱۰۰ نمره)

تاریخ تحویل: ۱۷ آذر ۱۴۰۲

پرسش ۱ (۱۰ نمره)

(آ) فرض کنید ماتریس A یک ماتریس nilpotent باشد. نشان دهید که $I + A$ وارون پذیر است.

(ب) شرایط معکوس‌پذیری و معکوس ماتریس $I + uv^T$ را بدست آورید که در آن $I \in R^{n\times n}$ ماتریس همانی بوده و $u, v \in R^n$ باشند.

(ج) به ازای هر ماتریس معکوس‌پذیر $A \in R^{n\times n}$ و هر دو بردار $u, v \in R^n$ نشان دهید:

$$(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^TA^{-1}}{1 + v^TA^{-1}u}$$

پاسخ

(آ) میدانیم ماتریس A nilpotent است. پس یعنی به ازای یک عدد طبیعی مانند k داریم: $A^k = 0$
بنابراین:

$$A^k + I = 0 + I = I \quad (*)$$
$$\Rightarrow A^k + I = (A + I)(I - A + A^2 - A^3 + ...) \overset{(*)}{=} I$$
$$\Rightarrow (A + I)^{-1} = (I - A + A^2 - A^3 + ...)$$

(ب) این وارون برابر است با

$$I - \frac{uv^T}{1 + v^Tu}$$

و در شرایطی برقرار است که $v^Tu \neq -1$. با ضرب کردن ماتریس بالا از چپ و راست در $1 + uv^T$ به راحتی مشاهده می‌شود که در هر دو حالت حاصل برابر با I می‌شود.

(ج) برای حل این بخش یک راه مانند بالا ضرب کردن است که کمی طولانی می‌شود. راه دیگر با فاکتور گرفتن از A شروع می‌شود:

$$(A + uv^T)^{-1} = (A(I + A^{-1}uv^T))^{-1} = (I + A^{-1}uv^T)^{-1}A^{-1}$$

حال تعریف می‌کنیم $w = A^{-1}u$. در نتیجه خواهیم داشت:

$$(A + uv^T)^{-1} = (I + wv^T)^{-1}A^{-1} = (I - \frac{wv^T}{1 + v^Tw})A^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^TA^{-1}}{1 + v^TA^{-1}u}$$

پرسش ۲ (۱۰ نمره) اثبات کنید که دترمینان ماتریس های زیر برابر ۰ است:

(آ) برای $n \geq 3$:

$$A_{n\times n} : a_{i,j} = i + j$$

(ب) برای $n \geq 4$:

$$B_{n\times n} : b_{i,j} = (i + j)^2$$

پاسخ برای حل این مسئله با استفاده از تعدادی row operation یک سطر یا ستون ۰ در ماتریس به وجود میاوریم. که از آن میتوان نتیجه گرفت دترمینان ماتریس برابر ۰ خواهد بود.

(آ) در مرحله اول از سطر سوم، سطر دوم را کم میکنیم و از سطر دوم، سطر اول را کم میکنیم. سپس از سطر سوم، سطر دوم را کم میکنیم. که در نهایت سطر سوم برابر ۰ خواهد بود.

$$\begin{vmatrix} ۲ & ۳ & ۴ & \dots & n+۱ \\ ۳ & ۴ & ۵ & \dots & n+۲ \\ ۴ & ۵ & ۶ & \dots & n+۳ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۲ & ۳ & ۴ & \dots & n+۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & \dots & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & \dots & ۱ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۲ & ۳ & ۴ & \dots & n+۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & \dots & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & \dots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = ۰$$

(ب) ابتدا به ترتیب سطر سوم را از چهارم، دوم را از سوم و اول را از دوم کم میکنیم. سپس مشابه مراحل (آ) را برای سطر های دوم تا چهارم اجرا میکنیم. یعنی سطر چهارم را منهای سطر سوم میکنم و سطر سوم را منهای سطر دوم میکنیم. سپس سطر چهارم را منهای سطر سوم میکنیم. در نهایت سطر چهارم برابر ۰ خواهد شد.

$$\begin{vmatrix} ۴ & ۹ & ۱۶ & \dots & (j+۱)^۲ & \dots & (n+۱)^۲ \\ ۹ & ۱۶ & ۲۵ & \dots & (j+۲)^۲ & \dots & (n+۲)^۲ \\ ۱۶ & ۲۵ & ۳۶ & \dots & (j+۳)^۲ & \dots & (n+۳)^۲ \\ ۲۵ & ۳۶ & ۴۹ & \dots & (j+۴)^۲ & \dots & (n+۴)^۲ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۴ & ۹ & ۱۶ & \dots & (j+۱)^۲ & \dots & (n+۱)^۲ \\ ۵ & ۷ & ۹ & \dots & ۲(j+۲)+۱ & \dots & ۲(n+۲)+۱ \\ ۷ & ۹ & ۱۱ & \dots & ۲(j+۳)+۱ & \dots & ۲(n+۳)+۱ \\ ۹ & ۱۱ & ۱۳ & \dots & ۲(j+۴)+۱ & \dots & ۲(n+۴)+۱ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} ۴ & ۹ & ۱۶ & \dots & (j+۱)^۲ & \dots & (n+۱)^۲ \\ ۵ & ۷ & ۹ & \dots & ۲(j+۲)+۱ & \dots & ۲(n+۲)+۱ \\ ۲ & ۲ & ۲ & \dots & ۲ & \dots & ۲ \\ ۲ & ۲ & ۲ & \dots & ۲ & \dots & ۲ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۴ & ۹ & ۱۶ & \dots & (j+۱)^۲ & \dots & (n+۱)^۲ \\ ۵ & ۷ & ۹ & \dots & ۲(j+۲)+۱ & \dots & ۲(n+۲)+۱ \\ ۲ & ۲ & ۲ & \dots & ۲ & \dots & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ & \dots & ۰ & \dots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = ۰$$

برای تمرین و تفکر بیشتر میتوانید این قضیه را به ماتریس های به فرم $M_{n*n} : m_{i,j} = (i+j)^k$ تأمیم دهید.

پرسش ۳ (۱۰ نمره) فرض کنید که بردارهای $v_۱, v_۲, ..., v_m$ مستقل خطی باشند. ثابت کنید اگر n بردار مستقل خطی دیگر مانند $u_۱, u_۲, ..., u_n$ داشته باشیم و یک زیرمجموعه m عضوی دلخواه از این n بردار مانند $w_۱, w_۲, ..., w_m$ در نظر بگیریم آنگاه:

$$dim(span\{v_۱ + w_۱, v_۲ + w_۲, ..., v_m + w_m\}) \geq m - n.$$

پاسخ دو ماتریس Aو B را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ v_۱ & v_۲ & \dots & v_m \\ | & | & & | \end{bmatrix}, B = -\begin{bmatrix} | & | & & | \\ w_۱ & w_۲ & \dots & w_m \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

می دانیم که:

$$rank(A) = m, \quad rank(B) = rank(-B) \leq n$$

حال داریم:

$$rank(A-B) + rank(B) \geq rank(A) \to rank(A-B) + n \geq rank(A) = m \to rank(A-B) \geq m - n$$

از آنجایی که

$$A - B = \begin{bmatrix} & | & & & | & & & & | & \\ v_۱ & + & w_۱ & v_۲ & + & w_۲ & \dots & v_m & + & w_m \\ & | & & & | & & & & | & \end{bmatrix}$$

پس

$$rank(A-B) = dim(span\{v_۱ + w_۱, v_۲ + w_۲, ..., v_m + w_m\}) \geq m - n$$

پرسش ۴ (۱۰ نمره) ثابت کنید برای هر ماتریس مربعی A، رنک ماتریس برابر r است اگر و تنها اگر r بزرگترین عددی باشد به طوری که یک sub matrix با ابعاد $r \times r$ با دترمینان مخالف صفر وجود داشته باشد.

پاسخ ($\Leftarrow$) اگر رنک ماتریس A برابر r باشد آنگاه r ستون(سطر) مستقل خطی دارد.با استفاده از r سطر مستقل خطی یک ماتریس جدید با ابعاد$r \times n$ در نظر میگیریم. چون سطر های این ماتریس مستقل خطی هستند پس رنک این ماتریس برابر r خواهد بود و بنابراین باید r ستون مستقل خطی نیز داشته باشد. با حذف $n - r$ ستونی که در مجموعه ستون های مستقل خطی قرار نمی گیرند می توان یک ماتریس مربعی با ابعاد $r \times r$ ایجاد کرد که full rank است و بنابراین دترمینان مخالف صفر دارد.

برای اثبات اینکه r بزرگترین عدد با ویژگی های گفته شده است، از برهان خلف استفاده می‌کنیم : فرض می‌کنیم یک زیرماتریس با ابعاد $k \times k$ وجود دارد به طوری که $r < k$ است و دترمینان آن مخالف صفر است. طبق لم۱ رنک ماتریس A حداقل k است و در اینجا به تناقض میرسیم و حکم ثابت میشود. ($\Rightarrow$) طبق لم۱ نتیجه می‌شود که $rank(A) \geq r$ است. اکنون باید نشان دهیم که رنک ماتریس A نمی‌تواند بیشتر از r باشد.

برای نشان دادن اینکه رنک ماتریس A برابر r است از برهان خلف استفاده می‌کنیم : فرض می‌کنیم که رنک برابر k است به طوری که $k > r$ است. طبق اثبات بخش قبل باید یک زیرماتریس با ابعاد $k \times k$ وجود داشته باشد که دترمینانش مخالف صفر است. با توجه به اینکه r بزرگترین عددی است که چنین زیرماتریسی را شکل می‌دهد بنابراین به تناقض می‌رسیم و اثبات می‌شود که $rank(A) = r$ است. لم۱)اگر یک submatrix با ابعاد $m \times m$ با دترمینان مخالف صفر وجود داشته باشد آنگاه $rank(A) \geq m$ است. ماتریس $B_{m\times m}$ با دترمینان مخالف صفر را یک submatrix برای ماتریس A در نظر بگیرید. ماتریس B دارای m ستون(سطر) مستقل خطی است. این ستون(سطر)ها بخشی از ستون(سطر)های ماتریس A هستند بنابراین ستون(سطر)های متناظر با این m ستون(سطر) در ماتریس A نیز مستقل خطی اند.در نتیجه حداقل m ستون(سطر) مستقل خطی در ماتریس A پیدا شده است و رنک A حداقل m است و قضیه مربوطه ثابت شد.

پرسش ۵ (۱۰ نمره) فرض کنید به ازای دو ماتریس $A_{m\times n}$ و $B_{n\times m}$، ماتریس $I_{m\times m} + AB$ وارون پذیر است.نشان دهید ماتریس $I_{n\times n} + BA$ وارون پذیر است.

پاسخ برای اثبات از این نکته استفاده می‌کنیم که اگر معادله $Ax = ۰$ تنها دارای جواب بدیهی $\overrightarrow{x} = ۰$ باشد آنگاه ماتریس A فول رنک است. بنابراین باید نشان دهیم اگر $(I + BA)x = ۰$ است آنگاه $\overrightarrow{x} = ۰$ است.

$$
\begin{aligned}
&(I + BA)x = ۰ \quad (*) \\
\Rightarrow &A(I + BA)x = ۰ \\
\Rightarrow &Ax + ABAx = ۰ \\
\Rightarrow &(I + AB)Ax = ۰
\end{aligned}
$$

ماتریس $I + AB$وارون پذیر است بنابراین معادله فوق تنها دارای جواب بدیهی $A\overrightarrow{x} = ۰$ است. بنابراین * را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$
\begin{aligned}
&x + BAx = ۰ \\
\Rightarrow &x + B \times ۰ = ۰ \\
\Rightarrow &x = ۰
\end{aligned}
$$

بنابراین $(I + BA)x = ۰$ تنها جواب بدیهی دارد پس ماتریس $I + BA$ فول رنک و در نتیجه وارون پذیر است.

پرسش ۶ (۲۰ نمره)

(آ) تبدیل خطی T بر فضای برداری V را در نظر بگیرید به طوری که range(T) و null(T) هر دو دارای بعد متناهی هستند. نشان دهید V نیز دارای بعد متناهی است.

(ب) فضای برداری متناهی V و تبدیل خطی T از فضای V به W را در نظر بگیرید. نشان دهید range(T) دارای بعد متناهی است و $dim(V) = dim(null(T)) + dim(range(T))$ برقرار است.

(ج) دو فضای برداری V و W را با بعد متناهی در نظر گرفته و U را زیرفضای V فرض کنید. ثابت کنید تبدیل خطی T از فضای برداری V به W وجود دارد که $null(T) = U$ است اگر و تنها اگر $dim(V) \leq dim(W) + dim(U)$.

(د) فضای برداری V با بعد متناهی و تبدیل خطی T از V به W را در نظر بگیرید.ثابت کنید زیرفضای U در V وجود دارد به طوری که اشتراک U و null(T) برابر $\{۰\}$ و $range(T) = \{T(u) : u \in U\}$.

پاسخ

(آ) چون بعد فضاهای range(T) و null(T) متناهی است بنابراین میتوان تعداد متناهی پایه برای هر فضا انتخاب کرد. پایه های $w_۱, \ldots, w_m$ برای range(T) و پایه های $u_۱, \ldots, u_n$ را برای null(T) در نظر می‌گیریم. به ازای هر w_i یک v_i در V وجود دارد به طوری که $T(v_i) = w_i$. به ازای هر v دلخواه در V داریم :

$$
\begin{aligned}
&T(v) = a_۱w_۱ + \cdots + a_mw_m \\
\Rightarrow &T(v) = a_۱Tv_۱ + \cdots + a_mTv_m \\
\Rightarrow &T(v) = T(a_۱v_۱ + \cdots + a_mv_m) \\
\Rightarrow &T(v) - T(a_۱v_۱ + \cdots + a_mv_m) = ۰ \\
\Rightarrow &T(v - a_۱v_۱ - \cdots - a_mv_m) = ۰
\end{aligned}
$$

بنابراین $v - a_۱v_۱ - \cdots - a_mv_m$ در null(T) قرار دارد و میتوان آن را به صورت ترکیب خطی پایه های null(T) نوشت.

$$
\begin{aligned}
&v - a_۱v_۱ - \cdots - a_mv_m = b_۱u_۱ + \cdots + b_nu_n \\
\Rightarrow &v = a_۱v_۱ + \cdots + a_mv_m + b_۱u_۱ + \cdots + b_nu_n
\end{aligned}
$$

هر عضو دلخواه v به شکل بالا توسط تعداد متناهی بردار span می‌شود بنابراین V متناهی است.

(ب) چون فضای برداری V متناهی است، پس null(T) نیز متناهی است و می‌توان تعداد متناهی پایه برای آن در نظر گرفت. فرض می‌کنیم $u_۱, \ldots, u_n$ پایه های فضای null(T) هستند و پایه های فضای V ، $u_۱, \ldots, u_n, v_۱, \ldots, v_m$ هستند.
به ازای هر v دلخواه در V داریم :

$$
\begin{aligned}
&v = a_۱u_۱ + \cdots + a_nu_n + b_۱v_۱ + \cdots + b_mv_m \\
\Rightarrow &T(v) = T(a_۱u_۱ + \cdots + a_nu_n + b_۱v_۱ + \cdots + b_mv_m) \\
\Rightarrow &T(v) = b_۱T(v_۱) + \cdots + b_mT(v_m)
\end{aligned}
$$

در تساوی آخر از این نکته که u_i ها پایه های null(T) هستند و تحت تبدیل T به ۰ نگاشت می‌شوند استفاده کردیم. این تساوی نشان می‌دهد که فضای range(T) را $T(v_1),\dots,T(v_m)$ پدید می‌آورند. چون تعداد v_iها متناهی است پس range(T) نیز متناهی است.
حالا برای پیدا کردن پایه های range(T) باید نشان دهیم $T(v_1),\dots,T(v_m)$ مستقل خطی هستند.ضرایب $c_1,\dots,c_m$ را به طوری که تساوی زیر را درست کنند، در نظر می‌گیریم.

$$\begin{aligned}
&c_1T(v_1)+\cdots+c_mT(v_m)=0\\
\Rightarrow&T(c_1v_1+\cdots+c_mv_m)=0\\
\Rightarrow&c_1v_1+\cdots+c_mv_m\in null(T)\\
\Rightarrow&c_1v_1+\cdots+c_mv_m=d_1u_1+\cdots+d_nu_n
\end{aligned}$$

با توجه به اینکه $u_1,\dots,u_n,v_1,\dots,v_m$ مستقل خطی هستند، تمام ضرایب c_i باید برابر صفر باشند و در نتیجه $T(v_i)$ ها مستقل خطی هستند. چون $T(v_i)$ ها مستقل خطی هستند و فضای range(T) را اسپن می‌کنند پس پایه های range(T) هستند و $dim(range(T))=m$ است و این تساوی حکم دوم مساله را نیز اثبات می‌کند.

(ج) اگر تبدیل خطی مانند T وجود داشته باشد که $null(T)=U$ باشد آنگاه طبق الف داریم :

$$\begin{aligned}
&null(T)=U\\
\Rightarrow&dim(null(T))=dim(U)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&dim(range(T))+dim(null(T))=dim(V)\\
\Rightarrow&dim(range(T))+dim(U)=dim(V)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&range(T)\subseteq W\\
\Rightarrow&dim(range(T))+dim(U)=dim(V)\\
\Rightarrow&dim(W)+dim(U)\geq dim(V)
\end{aligned}$$

یک طرف قضیه اثبات شد. برای طرف دیگر ابتدا پایه های $u_1,\dots,u_n$ را برای U ، پایه های $u_1,\dots,u_n,v_1,\dots,v_m$ را برای V و $w_1,\dots,w_p$ را برای W در نظر می‌گیریم.به ازای هر عضو v تبدیل T را به شکل زیر تعریف می‌کنیم :

$$\begin{aligned}
&v=a_1u_1+\cdots+a_nu_n+b_1v_1+\cdots+b_mv_m\\
&T(v)=T(a_1u_1+\cdots+a_nu_n+b_1v_1+\cdots+b_mv_m)=b_1w_1+\cdots+b_mw_m
\end{aligned}$$

با توجه به نتیجه بالا و فرض $dim(W)+dim(U)\geq dim(V)$، داریم $p\geq n$ که نشان می‌دهد تبدیل T تبدیل معتبری است چون $range(T)\subseteq W$ و همچنین با تعریف $T(a_1u_1+\cdots+a_nu_n)=0$، $null(T)=U$ نتیجه میشود. بنابراین تبدیل T از V به W و $null(T)=U$ یافت شد و حکم ثابت شد.

(د) با استفاده از لم۱ می‌توان نشان داد که زیرفضای U وجود دارد که $null(T)\oplus U=V$.

به ازای هر u عضو U واضح است که $range(T)\supseteq\{T(u):u\in U\}$ برقرار است.برای طرف دیگر باید توجه کنیم هر عضو دلخواه v در V را میتوان به صورت مجموع u در U و u' در null(T) نوشت. پس داریم :

$$\begin{aligned}
&v=u+u'\\
\Rightarrow&T(v)=T(u+u')\\
\Rightarrow&T(v)=T(u)+T(u')\\
\Rightarrow&T(v)=T(u)
\end{aligned}$$

بنابراین هرعضو range(T) عضوی از $\{T(u):u\in U\}$ است و این یعنی $range(T)\subseteq\{T(u):u\in U\}$. با دو نتیجه بدست آمده داریم : $range(T)=\{T(u):u\in U\}$ و طرف دیگر حکم اثبات شد.

لم۱) اگر V فضایی با بعد متناهی باشد و U زیر فضایی از آن، زیر فضایی مانند W وجود دارد که $U\oplus W=V$.

اثبات) پایه های $u_1,\dots,u_m$ را برای U و پایه های $u_1,\dots,u_m,w_1,\dots,w_n$ را برای V در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم فضایی که توسط $w_1,\dots,w_n$ اسپن میشود، W است.برای نشان دادن direct sum نشان دهیم که $U\cap W=\{0\}$ و $V=W+U$.
تساوی اول به این شکل اثبات میشود که چون هر عضو V از ترکیب خطی پایه های V یعنی u_i ها و w_i ها حاصل میشود می توان نوشت :

$$\begin{aligned}
&v=a_1u_1+\cdots+a_mu_m+b_1w_1+\cdots+a_nw_n\\
\Rightarrow&v=u+w:u\in U,w\in W,v\in V
\end{aligned}$$

که u_i ها پایه فضای U و w_i ها فضای W را اسپن می‌کنند.
برای تساوی دوم چون u_i ها و w_i ها مستقل خطی هستند پس فضا هایی که درست می‌کنند به جز ۰ دارای اشتراکی نیستند. بنابراین هر دو ویژگی ثابت شدند و این یعنی زیرفضایی همچون W وجود دارد.

پرسش ۷ (۲۰ نمره)

(آ) (۱۰ نمره) ماتریس‌های A, B ماتریس‌های دلخواه $n \times n$ می‌باشند. ثابت کنید اگر داشته باشیم $AB = BA$ آنگاه نامساوی زیر برقرار است:

$$Rank(A+B) + Rank(AB) \leq Rank(A) + Rank(B)$$

(ب) (۱۰ نمره) فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ باشد به طوری که $A^۲ = ۰$. ثابت کنید:

$$Rank(A + A^T) = ۲Rank(A)$$

(ج) $A, B, C \in M_n(R)$ ماتریس‌هایی ناصفر هستند طوری که $ABC = ۰$. ثابت کنید:

$$rank(A) + rank(B) + rank(C) \leq ۲n$$

(د) AوB دو ماتریس مربعی هستند که $AB = ۲A + ۳B$. ثابت کنید $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$.

(ه) دو ماتریس $A_{m\times k}$ و $B_{k\times n}$ را در نظر بگیرید.نشان دهید : $rank(A) + rank(B) \leq rank(AB) + k$.

پاسخ

(آ) (۱۰ نمره) نمادگذاری زیر را درنظر بگیرید:

$$W_۱ = Nullspace(A)$$
$$W_۲ = Nullspace(B)$$

از قبل می‌دانیم که اگر $W_۱, W_۲$ زیرفضاهایی در V باشند:

$$Dim(W_۱ + W_۲) + Dim(W_۱ \cap W_۲) = Dim(W_۱) + Dim(W_۲)$$

دقت کنید که:

$$W_۱ + W_۲ = \{u + v \mid u \in W_۱, v \in W_۲\}$$

حال به سراغ اثبات مسئله می‌رویم. ابتدا نامساوی حکم را با استفاده از قضیه $rank - nullity$ به صورت زیر می‌نویسیم:

$$Rank(A+B) + Rank(AB) \leq Rank(A) + Rank(B) \Longleftrightarrow Null(A+B) + Null(AB) \geq Null(A) + Null(B)$$

حال با استفاده از نکته‌ای که در بالا بیان کردیم، سمت راست نامساوی را به این صورت می‌نویسیم:

$$Null(A) + Null(B) = Dim(W_۱) + Dim(W_۲) = Dim(W_۱ + W_۲) + Dim(W_۱ \cap W_۲)$$

حال برای اثبات حکم کافی است ثابت کنیم که:

$$\begin{cases} Dim(W_۱ + W_۲) \leq Null(AB) \\ Dim(W_۱ \cap W_۲) \leq Null(A+B) \end{cases}$$

حال برای اثبات این دو نامساوی اینگونه عمل می‌کنیم:

$$\forall x \in Dim(W_۱ + W_۲) : \exists v \in W_۱, u \in W_۲ : x = v + u \implies ABx = ABv + ABu = BAv + ABu = ۰$$
$$\implies \boxed{Dim(W_۱ + W_۲) \leq Null(AB)}$$

برای نامساوی دوم هم داریم:

$$\forall x \in Dim(W_۱ \cap W_۲) : (A+B)x = Ax + Bx = ۰ \implies \boxed{Dim(W_۱ \cap W_۲) \leq Null(A+B)}$$

(ب) (۱۰ نمره) ابتدا ثابت می‌کنیم که اگر داشته باشیم:

$$W_۱ = Nullspace(A)$$
$$W_۲ = Nullspace(A^T)$$

آنگاه:

$$Dim(W_۱ + W_۲) = n$$

بدین منظور دقت کنید که برای هر $x \in C(A)$ داریم:

$$x \in C(A) \implies \exists z : Az = x \implies A^۲ z = Ax = ۰ \implies x \in W_۱$$

که یعنی فضای ستونی A یک زیر فضا از $W_۱$ است. اما می‌دانیم که به علت مکمل متعامد بودن فضاهای $W_۲, C(A)$ پس هر بردار درون R_n را می‌توان به صورت جمع دو بردار درون این دو زیرفضا نوشت. حال با توجه به نکته‌ای که در بالا ثابت کردیم، پس هر بردار درون R_n را می‌توان به صورت جمع دو بردار درون زیرفضاهای $W_۱, W_۲$ نوشت.

$$\implies Dim(W_۱ + W_۲) \geq n$$

که نتیجه می‌دهد $Dim(W_1 + W_2) = n$.
حال به ادامه حل می‌پردازیم.

لم ۱. فضاهای ستونی و سطری ماتریس A بر هم عمود هستند.
برای اثبات این نکته دقت کنید که اگر دو بردار دلخواه در فضاهای سطری و ستونی این ماتریس مانند Ax, A^Ty در نظر بگیریم:

$$(A^Ty)^TAx = y^TAAx = y^TA^2x = 0$$

که لم را ثابت می‌کند.

از این لم می‌توانیم نتیجه بگیریم که فضاهای $Nullspace(A + A^T), Nullspace(A) \cap Nullspace(A^T)$ برابر هستند. برای اثبات این نکته هم اینگونه عمل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x \in Nullspace(A + A^T) \implies Ax + A^Tx = 0 \implies Ax = -A^Tx \overset{\text{لم ۱}}{\implies} Ax = A^Tx = 0 \implies x \\ x \in Nullspace(A) \cap Nullspace(A^T) \implies Ax = A^Tx = 0 \implies (A + A^T)x = 0 \implies x \in Nullspace(A + A^T) \end{cases}$$

که حکم ما را نتیجه می‌دهد. حال دقت کنید که:

$$\begin{aligned} Dim(W_1 + W_2) = n &\implies Dim(W_1) + Dim(W_2) - Dim(W_1 + W_2) = 2Dim(W_1) - n \\ &\implies Dim(W_1 \cap W_2) = 2Dim(W_1) - n \\ &\implies Dim(Nullspace(A + A^T)) = 2Dim(Nullspace(A)) - n \implies \boxed{Rank(A + A^T) = 2Rank(A)} \end{aligned}$$

(ج) دقت کنید که $image(BC) \subset ker(A)$. همچنین داریم:

$$n = rank(A) + dim(ker(A)) \geq rank(A) + rank(BC)$$

حال دقت کنید که:

$$\begin{aligned} &\forall u \in ker(BC) : u \in ker(C) \text{ or } Cu \in ker(B) \\ &\implies dim(ker(B)) + dim(ker(C)) \geq dim(ker(BC)) \\ &\implies rank(BC) \geq rank(B) + rank(C) - n \end{aligned}$$

با جایگذاری نابرابری حاصل در نابرابری قبلی داریم:

$$rank(A) + rank(B) + rank(C) \leq 2n.$$

(د)

$$\begin{aligned} &AB - 2A - 3B + 6I = 6I \\ &\implies (A - 3I)(B - 2I) = 6I \\ &\implies (B - 2I)(A - 3I) = 6I \\ &\implies AB = BA \end{aligned}$$

$$\forall u \in \ker(B) : ABu = 2Au + 3Bu \implies Au = 0 \implies u \in \ker(A)$$

با استدلالی مشابه داریم: $\ker(A) = \ker(B) \implies \text{rank}(A) = \text{rank}(B)$

(ه) ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که $AB = 0$ است. اگر $A = 0$ باشد آنگاه نامساوی $rank(B) \leq min(k, n)$ حاصل می‌شود. اگر $rank(A) \geq 1$ باشد آنگاه ستون های ماتریس B در null(A) قرار دارند.

$$\begin{aligned} &col(B) \subseteq null(A) \\ \Rightarrow &ColRank(B) \leq nullity(A) \\ \Rightarrow &rank(B) \leq nullity(A) = k - rank(A) \\ \Rightarrow &rank(A) + rank(B) \leq k \end{aligned}$$

حالا $rank(AB) = r > 0$ را در نظر می‌گیریم. از لم۱ استفاده میکنیم و ماتریس AB را به شکل XY می نویسیم. دو ماتریس C و D را به شکل زیر تعریف میکنیم:

$$C = \begin{bmatrix} A & X \end{bmatrix}_{m \times (k+r)}, D = \begin{bmatrix} B \\ -Y \end{bmatrix}_{(k+r) \times n}$$

با توجه به فرم ماتریس‌های C و D می‌توان نامساوی های زیر را نتیجه گرفت چون رنک هر ماتریس تعداد ستون(سطر)های مستقل خطی است پس :

$$\begin{aligned} &rank(A) \leq rank(C) \\ &rank(B) \leq rank(D) \\ \Rightarrow &rank(A) + rank(B) \leq rank(C) + rank(D) \end{aligned}$$

طرف چپ نامساوی به این شکل اثبات شد، برای طرف راست از ماتریس های C و D و ضرب ماتریس های بلوکی استفاده می‌کنیم.

$$CD = AB - XY = ۰$$

با استفاده از لم۲ و $CD = ۰$، می‌توان نشان داد :

$$rank(C) + rank(D) \leq k + r$$

که r برابر rank(AB) است و حکم ثابت می شود.

لم۱) برای هر ماتریس A با رنک r بزرگتر از ۰، یک full rank factorization به شکل $A = XY$ با $rank(X) = r$ وجود دارد.

اثبات : r ستون مستقل خطی در ماتریس A را به عنوان ستون های ماتریس X در نظر می گیریم. رنک این ماتریس برابر r است. همچنین چون ستون‌های X، پایه های فضای ستونی ماتریس A هستند بنابراین هر ستون A را میتوان از ترکیب خطی ستون های X بدست آورد. بنابراین برای هر ستون a_i میتوان یک بردار y_i یکتا یافت به طوری که $Xy_i = a_i$ برقرار باشد. y_i ها را ستون ماتریس Y قرار میدهیم و به این شکل ماتریس A به XY تبدیل میشود.

لم۲) اگر دو ماتریس $A_{n\times m}$ و $B_{m\times k}$ با شرایط $AB = ۰$ داشته باشیم آنگاه $rank(A) + rank(B) \leq m$ برقرار است.

اثبات)با توجه به اینکه ضرب دو ماتریس برابر صفر است میتوان نتیجه گرفت که $Ab_i = ۰$ است و b_i ستون iام ماتریس B است. بنابراین ستون های B در $null(A)$ قرار دارند.

$$\begin{aligned}
&col(B) \subseteq null(A)\\
\Rightarrow& rank(B) \leq nullity(A)\\
\Rightarrow& rank(B) \leq m - rank(A)\\
\Rightarrow& rank(B) + rank(A) \leq m
\end{aligned}$$

پرسش ۸ (۱۰ نمره) برداری $n-$تایی مانند u از اعداد مختلط داریم طوری که $||u|| = ۱$. نشان دهید $rank(I - uu^*) = n - ۱$.

پاسخ فرض کنید برداری مانند v داریم طوری که $u^*v = ۰$ (v بر u عمود باشد). حال دقت کنید که $(I - uu^*)v = v$ همچنین می‌دانیم $n - ۱$ بردار مستقل خطی عمود بر u وجود دارد، پس:

$$dim(range(I - uu^*)) \geq n - ۱ \implies \mathrm{rank}(I - uu^*) \geq n - ۱$$

همچنین داریم: $||u|| = ۱ \implies u^*u = ۱ \implies (I - uu^*)u = ۰ \implies dim(\ker(I - uu^*)) \geq ۱$ پس با توجه به قضیه rank-nulity ثابت می‌شود $\mathrm{rank}(I - uu^*) = n - ۱$.